

1 Rappels et nouvelles notations

Définition 1 (Entiers naturels).

L'ensemble des entiers naturels est constitué de tous les nombres entiers positifs $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$.

Remarque : On note $\mathbb{N}$ cet ensemble (de naturale en italien par PEANO Giuseppe, 1858-1932).
Donc $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$.

Définition 2 (Entiers relatifs).

L'ensemble des nombres relatifs est constitué de tous les nombres entiers (positifs ou négatifs) $\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$.

Remarque : On note $\mathbb{Z}$ cet ensemble (de zahl : 'nombre' en allemand par Nicolas Bourbaki).

Définition 3 (Nombres décimaux).

On dit qu'un nombre est décimal s'il peut s'écrire avec une quantité finie de chiffres.

Exemples : 0,125 ; 3 ; -1/4 **mais pas** $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$!. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des décimaux (Nicolas Bourbaki).

Définition 4 (Nombres rationnels).

On dit qu'un nombre est rationnel s'il peut s'écrire sous la forme d'une fraction de deux entiers relatifs.

Exemples : Tous les nombres décimaux sont rationnels mais aussi $\frac{1}{3}$; $\frac{-287}{11}$ **mais** $\sqrt{2}$; π ne sont pas rationnels (admis). On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels (de quotiente par Peano Giuseppe)

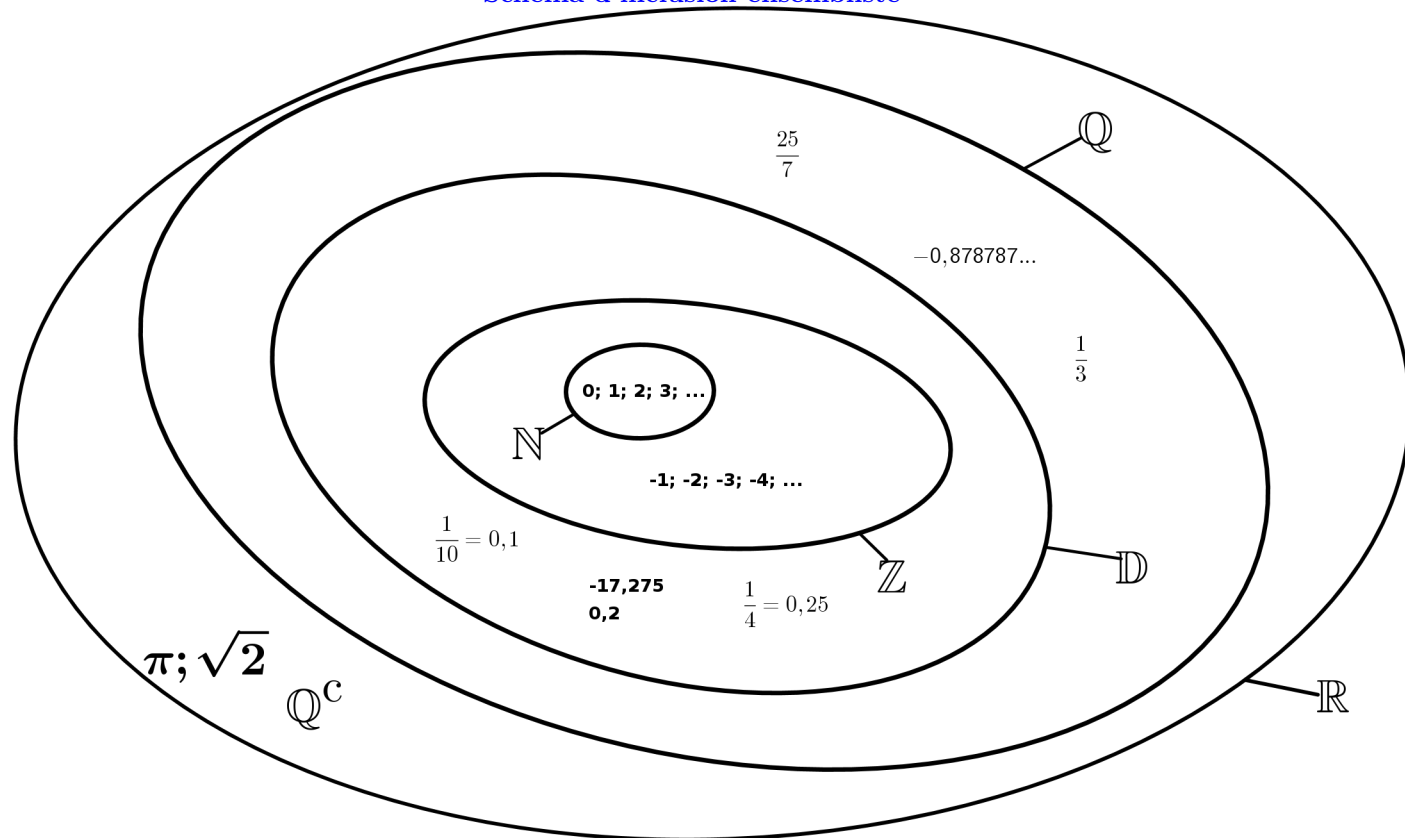
Définition 5 (Nombres irrationnels).

On dit qu'un nombre est irrationnel s'il ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux nombres entiers relatifs.

Exemples : $\sqrt{2}$, π , On note $\mathbb{Q}^c$ l'ensemble des nombres irrationnels.

Remarque : l'ensemble de tous les nombres précédents s'appelle l'ensemble des nombres réels, noté : $\mathbb{R}$.

Schéma d'inclusion ensembliste



Exercice :

À quelle catégorie appartiennent les nombres suivants (à placer dans le schéma) :

$-0,256$; $1/5$; 10^{-2} ; 3π ; $-225/15$.

2 Diviseurs et PGCD

Définition 6.

On dit qu'un nombre entier b divise un autre nombre entier a s'il existe un nombre entier c tel que $a = bc$, autrement dit si a est dans la table de multiplication de b .

Dans ce cas, on peut dire aussi que :

b est un diviseur de a
 a est un multiple de b
 a est divisible par b .

Exemples :

- $18 = 3 \times 6$ donc 3 et 6 sont des diviseurs de 18 et 18 est un multiple de 3 et 6.
- $77 = 11 \times 7$ donc 77 est divisible par 11.
- Voici la liste de tous les diviseurs de 25 : 1, 5, 25.
- Voici la liste de tous les diviseurs de 30 : 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.
- Voici la liste de tous les diviseurs de 31 : 1, 31.

Remarque : le nombre 1 est un diviseur de tous les autres nombres, autrement dit tout nombre est un multiple de 1.

Définition 7.

On dit qu'un nombre c est un diviseur commun de a et b si c divise à la fois a et b .

Parmi tous les diviseurs communs de deux nombres a et b , on note $\text{PGCD}(a,b)$ le plus grand diviseur commun à la fois à a et b .

On dit que a et b sont premiers entre eux lorsque $\text{PGCD}(a,b)=1$, autrement dit lorsque l'unique diviseur commun de a et b est 1.

Exemples :

- Les diviseurs de 60 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.
Les diviseurs de 48 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.
Les diviseurs communs de 48 et 60 sont donc : 1, 2, 3, 4, 6 et 12 et donc $\text{PGCD}(60,48)=12$
- Les diviseurs de 18 sont : 1, 2, 3, 6, 9, 18.
Les diviseurs de 35 sont : 1, 5, 7, 35.
L'unique diviseur commun de 18 et 35 est 1, $\text{PGCD}(18,35)=1$ et donc 18 et 35 sont premiers entre eux.

Remarques : Pour tout nombre entier a et b , on a :

$$\text{PGCD}(a,a)=a; \quad \text{PGCD}(a,a \times b)=a$$

Exercice type brevet :

Gauss possède 60 carambars et 48 malabars, il décide de les partager en petits sachets identiques pour les donner à ses professeurs. Combien peut-il faire de sachets identiques au maximum ? Quelle est la composition de chacun des sachets ?

Réponse : On veut pouvoir partager les carambars et les malabars en un même nombre de paquets. On cherche donc les diviseurs communs de 60 et 48 et celui qui nous intéresse est le plus grand puisqu'on cherche le maximum de sachets identiques possibles. Or on sait que $\text{PGCD}(60,48)=12$, Gauss peut donc faire 12 sachets identiques au maximum.

3 Algorithmes et PGCD

3.1 Algorithme des différences

Propriété 1.

Le PGCD de deux nombres entiers a et b est égal au PGCD de : la différence entre a et b et du plus petit nombre entre a et b .

Exemples :

- $\text{PGCD}(12,15)=\text{PGCD}(12,3)$ car la différence entre 12 et 15 est **3** et le plus petit entier entre 12 et 15 est **12**.
- $\text{PGCD}(35,25)=\text{PGCD}(25,10)$ car la différence entre 35 et 25 est **10** et le plus petit entier entre 35 et 25 est **25**.

Algorithme :

On en déduit alors une méthode pour trouver le PGCD de deux nombres entiers, pour cela il suffit de calculer les différences successives. Le PGCD est alors la dernière différence non nulle.

Exemple : calcul du PGCD(63,45)

a	b	différences
63	45	18
45	18	27
27	18	9
18	9	9
9	9	0

À chaque ligne on calcule la différence entre a et b , puis à la ligne suivante on remplace a par le plus petit nombre entre a et b et on remplace b par la différence entre a et b .

La dernière différence non nulle étant le nombre **9** on en déduit que $\text{PGCD}(63,45)=9$

3.2 Algorithme d'Euclide

Propriété 2.

Le PGCD de deux nombres entiers a et b (avec $a \geq b$) est égal au PGCD du plus petit nombre entre a et b et du reste dans la division euclidienne de a par b .

Exemples :

- $\text{PGCD}(24,60)=\text{PGCD}(24,12)$ car $60 = 24 \times 2 + 12$
- $\text{PGCD}(118,32)=\text{PGCD}(32,22)$ car $118 = 32 \times 3 + 22$

Algorithme :

On en déduit alors une méthode pour trouver le PGCD de deux nombres entiers, pour cela il suffit de calculer les restes dans les divisions euclidiennes successives. Le PGCD est alors le dernier reste non nul.

Exemple : calcul du PGCD(312,255)

a	b	restes	égalités
312	255	57	$312 = 255 \times 1 + 57$
255	57	27	$255 = 57 \times 4 + 27$
57	27	3	$57 = 27 \times 2 + 3$
27	3	0	$27 = 3 \times 9 + 0$

À chaque ligne on calcule le reste dans la division euclidienne de a par b , puis on remplace a par le plus petit nombre entre a et b et on remplace b par le reste dans la division euclidienne de a par b .

La dernier reste non nul étant le nombre **3** on en déduit que $\text{PGCD}(312,255)=3$

Petite introduction (pour le prof.) : rappeler ce qu'est une fraction irréductible (en 5ème et 4ème) et montrer que pour avoir une fraction la plus "petite" possible il faut diviser (numérateur et dénominateur) par un même nombre (un diviseur commun) le plus grand possible donc par le PGCD.

4 Fractions et PGCD

Définition 8.

On dit qu'une fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible** lorsque a et b sont premiers entre eux.

Exemples : On a vu dans un exemple précédent que $\text{PGCD}(18,35)=1$ donc la fraction $\frac{18}{35}$ est irréductible. Cela veut aussi dire qu'on ne peut pas la simplifier davantage. Par contre $\text{PGCD}(312,255)=3$, la fraction $\frac{312}{255}$ n'est donc pas irréductible, on peut la simplifier (en divisant par 3) $\frac{312}{255} = \frac{104}{85}$.

Propriété 3.

Pour rendre une fraction $\frac{a}{b}$ irréductible il suffit de diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

Exemples :

- $\text{PGCD}(312,255)=3$ donc $\frac{312}{255} = \frac{\cancel{3} \times 107}{\cancel{3} \times 85} = \frac{107}{85}$ et cette dernière fraction est irréductible.
- $\text{PGCD}(715,1001)=143$ donc $\frac{715}{1001} = \frac{\cancel{143} \times 7}{\cancel{143} \times 5} = \frac{7}{5}$ et cette dernière fraction est irréductible.